T E N T A M E N □L O G I C A 1

1 Bepaal met behulp van een waarheidstabel een disjunctieve normaalvorm voor de formule ¬(*p*   (*q* □ (¬*r* □ ¬(*p* □ *q*)))). Is er een eenvoudiger formule waarmee de gevonden formule logisch equivalent is? Motiveer uw antwoord.

2 Bewijs met natuurlijke deductie:
i *p*, (*p* □ *r*) □ *q*, ((*p* □ *q*) □ *q*) □ (*p* □ *r*) ⊢ *q*
ii □*x* (*Ax*   *Bx*), ¬□*x* *Ax* ⊢ ¬□*x* (*Bx* □ *Ax*)
Geef bij iedere stap in uw afleiding aan welke regel u gebruikt. U hoeft geen motivering te geven bij het toepassen van kwantorregels.

3 Ga met behulp van een semantisch tableau na of de volgende gevolgtrekkingen geldig zijn en geef in geval van ongeldigheid een tegenvoorbeeld:
i *p*   (*q* □ *r*) / *q* □ (*p*   *r*)
ii □*x* (*Ax* □ *Bx*), □*x* ((*Ax*   *Bx*) □ ¬*Cx*) / □*x* *Cx* □ □*x* *Bx*

4 Beschouw de volgende formuleverzameling □:
{□*x* □*y* ((*Rxy* □ □*z* (*Rxz* □ *y* = *z*)), □*x* □*y* (*Ryx* □ □*z* (*Rzx* □ *y* = *z*)),
□*x* □□*y* □*Rxy*}.
a Geef alle modellen voor □ met 1 object in het domein.
b Geef alle modellen voor □ met 2 objecten in het domein. Motiveer uw antwoord.
c Geef alle modellen voor □ met 3 objecten in het domein.
d Geef alle modellen voor □ met 4 objecten in het domein.

5 Bewijs axiomatisch: *p*, ¬*p* ⊢ *q*.

6 Geef voor elk der onderstaande paren van structuren $\boldsymbol{D}_1$ en $\boldsymbol{D}_2$ een zin □ en interpretatiefuncties I_1 respectievelijk I_2 zodat $\boldsymbol{D}_1, I_1 \models$ □ en $\boldsymbol{D}_2, I_2 \not\models$ □.
i $\boldsymbol{D}_1$ = □ℕ, {=}, ∅□
$\boldsymbol{D}_2$ = □ℕ, {≠}, ∅□
ii $\boldsymbol{D}_1$ = □ℝ, {□*x*□= □*y*□}, ∅□
$\boldsymbol{D}_2$ = □ℝ, {□*x* − *y*□< 1}, ∅□
iii $\boldsymbol{D}_1$ = □{de lijnen in $\mathbb{R}^2$}, {*l* en *l*′ snijden elkaar}, ∅□
$\boldsymbol{D}_2$ = □{de lijnen in $\mathbb{R}^3$}, {*l* en *l*′ snijden elkaar}, ∅□

7 Geef inductieve definities voor *haakjes*, het aantal haakjes van een propositielogische formule, en *bincon*, het aantal tweeplaatsige connectieven in een propositielogische formule. Bewijs met inductie:
haakjes(□) = 2·□*bincon*(□)

8 Beschouw de volgende omschrijving van een predikaat *P*:

Px □ *x* = 0   (□*y* (*y* < *x* □ *Py*) □ □*y* (*x* < *y* □ *Py*))

a Is de formule rechts van □ monotoon met betrekking tot *P*?
b Benader *P* stapsgewijs op {0, 1, ..., *n*}, voor willekeurige *n* □ ℕ.
c Benader *P* stapsgewijs op ℕ.

Uitwerkingen van de opgaven

1a De waarheidstabel voor de gegeven formule is als volgt:

	p	q	r	$\neg($	$p\ \vee$	$(q\ \wedge$	$(\neg r$	$\to$	$\neg(p$	$\wedge\ q))))$
	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1
	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0
	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0
→	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
→	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0
				↑						

Uit de tabel blijkt dat alleen de laatste twee bedelingen de formule $\neg(p \vee (q \wedge (\neg r \to \neg(p \wedge q))))$ waarmaken. Dit levert de volgende disjunctieve normaalvorm voor deze formule:

$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

De gegeven formule is dus alleen waar als p en q beide onwaar zijn (zie de pijltjes). De waardering van r doet er dan niet toe. De formule is dus logisch equivalent met $\neg p \wedge \neg q$.

2i Een afleiding met natuurlijke deductie van q uit p, $(p \wedge r) \to q$ en $((p \to q) \to q) \to (p \to r)$ is:

$$\dfrac{\dfrac{p \qquad \dfrac{p \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{p \qquad \overset{1}{p \to q}}{q}\,{\to}E}{(p \to q) \to q}\,{\to}I,[-1] \qquad ((p \to q) \to q) \to (p \to r)}{p \to r}\,{\to}E}{r}\,{\to}E}{p \wedge r}\,{\wedge}I \qquad (p \wedge r) \to q}{q}\,{\to}E$$

2ii Een afleiding met natuurlijke deductie van $\neg\exists x\,(Bx \wedge Ax)$ uit $\forall x\,(Ax \to Bx)$ en $\neg\exists x\, Ax$ is:

$$
\dfrac{\exists x\,(Ax \vee Bx) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{4}{Az \vee Bz} \qquad \overset{3}{Az} \qquad \dfrac{\overset{2}{Bz} \qquad \dfrac{\overset{1}{\forall x\,(Bx \to Ax)}}{Bz \to Az}\,\forall E}{Az}\,\to E}{Az}\,\vee E,\,[-2,-3]}{\exists x\,Ax}\,\exists I}{\exists x\,Ax}\,\exists E,\,[-4] \qquad \neg\exists x\,Ax}{\neg\forall x\,(Bx \to Ax)}\,\neg I,\,[-1]
$$

Opmerking: de stappen $\exists I$ en $\exists E$ zijn niet verwisselbaar!

3i Een mogelijk tableau voor de gegeven gevolgtrekking is:

$p \vee (q \to r) \circ q \to (p \vee r)$

$p \vee (q \to r), q \circ p \vee r$

$p \vee (q \to r), q \circ p, r$

- $p, q \circ p, r$ — $=$
- $q \to r, q \circ p, r$
  - $r, q \circ p, r$ — $=$
  - $q \circ p, r, q$ — $=$

Het tableau is gesloten, dus de gevolgtrekking is geldig.

3ii Een mogelijk tableau voor de gegeven gevolgtrekking is:

$\forall x\,(Ax \vee Bx), \forall x\,((Ax \wedge Bx) \to \neg Cx) \circ \exists x\,Cx \to \exists x\,Bx$

$\exists x\,Cx \circ \exists x\,Bx$

$\exists_L$ $\{d_1\}$

$Cd_1 \circ$

$\forall_L$

$Ad_1 \vee Bd_1, (Ad_1 \wedge Bd_1) \to \neg Cd_1 \circ$

$\exists_R$

$\circ Bd_1$

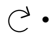
- $Bd_1 \circ$ — $=$
- $\circ Ad_1$
  - $\neg Cd_1 \circ$
    - $\circ Cd_1$ — $=$
  - $\circ Ad_1 \wedge Bd_1$
    - $\circ Ad_1, Bd_1$ — $\uparrow$

De gevolgtrekking is ongeldig, want het tableau is open. De open tak levert het volgende tegenvoorbeeld:

- C

d_1

4a Van de twee modellen met 1 object en 1 predikaatletter R is alleen de volgende een model van φ:



4b De zin $\forall x\, \forall y\, ((Rxy \to \forall z\, (Rxz \to y = z))$ interpreteren we als volgt: als van een object een pijl uitgaat, dan precies één. De zin $\forall x\, \forall y\, (Ryx \to \forall z\, (Rzx \to y = z))$ interpreteren we als volgt: als naar een object een pijl toegaat, dan precies één. De zin $\forall x\, \exists y\, Rxy$ ten slotte interpreteren we als volgt: van ieder object gaat een pijl uit. Samenvattend:

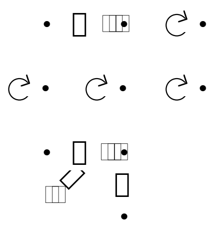
als van een object een pijl uitgaat, dan precies één	I
als naar een object een pijl toegaat, dan precies één	II
van ieder object gaat een pijl uit	III

Op grond van deze interpretatie komen we tot de volgende modellen met twee objecten. We noemen deze voor het gemak het linker- en het rechterobject.

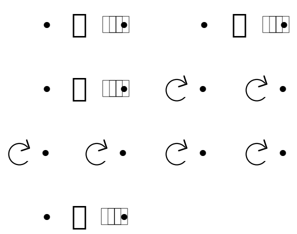
We weten dat van ieder object een pijl uitgaat, dus stel van het linker-object gaat een pijl uit naar het rechterobject. Een reflexieve pijl links is uitgesloten omdat er dan meer dan één pijl links uitgaat. Een reflexieve pijl rechts is uitgesloten omdat er dan meer dan één pijl rechts aankomt. Omdat er rechts ten minste één uitgaande pijl moet zijn, gaat er dus een pijl van rechts naar links. Het verkregen model is:

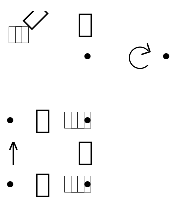
Stel nu daarentegen dat het linkerobject een reflexieve pijl heeft. Wegens I is dat de enige uitgaande, maar wegens II ook de enig binnenkomende pijl. De enig overgebleven mogelijkheid rechts is, gegeven III, dus een eveneens reflexieve pijl. Het resultaat is:

4c De (drie) verschillende modellen zijn:



4d De (vijf) verschillende modellen zijn:





5 Een axiomatische afleiding in S van q uit p en $\neg p$ is:

1	$\vdash \neg p \to (\neg q \to \neg p)$	axioma a
2	$\neg p \vdash \neg p$	aanname
3	$\neg p \vdash \neg q \to \neg p$	MP, 1, 2
4	$\vdash (\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$	axioma c
5	$\neg p \vdash p \to q$	MP, 3, 4
6	$p \vdash p$	aanname
7	$p, \neg p \vdash q$	MP, 5, 6

Dus $p, \neg p \vdash q$.

6i Bijvoorbeeld $\exists x\, Exx$ is waar op $\boldsymbol{D}_1$ en onwaar op $\boldsymbol{D}_2$, met $I_1(E) =$ '=' en $I_2(E) =$ '≠'.

6ii De relatie $|x| = |y|$ is transitief maar de relatie $|x - y| < 1$ niet. Dus de formule $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (Rxy \wedge Ryz \to Rxz)$, die transitiviteit weergeeft, is waar op $\boldsymbol{D}_1$, met $I_1(R)dd' \Leftrightarrow |d| = |d'|$, en onwaar op $\boldsymbol{D}_2$, met $I_2(R)dd' \Leftrightarrow |d - d'| < 1$.

6iii We moeten een verschil tussen 'snijden in $\mathbb{R}^2$' en 'snijden in $\mathbb{R}^3$' tot uitdrukking brengen. Een voorbeeld: als twee lijnen elkaar snijden, dan geldt in $\mathbb{R}^2$, maar niet in $\mathbb{R}^3$, dat elke lijn minstens één van die lijnen snijdt. In formule: $\forall x\, \forall y\, (Rxy \to \forall z\, (Rxz \vee Ryz))$. Deze formule is waar op $\boldsymbol{D}_1$ en onwaar op $\boldsymbol{D}_2$, met $I_1(R)ll' \Leftrightarrow$ 'l en l' snijden elkaar (in $\mathbb{R}^2$)' respectievelijk $I_2(R)ll' \Leftrightarrow$ 'l en l' snijden elkaar (in $\mathbb{R}^3$)'.

7 Inductieve definitie voor *haakjes*:

$haakjes(p) = 0$, voor atomaire formules p
$haakjes(\neg\varphi) = haakjes(\varphi)$
$haakjes((\varphi \square \psi)) = haakjes(\varphi) + haakjes(\psi) + 2$, voor $\square$ is $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$.

Inductieve definitie voor *bincon*:

$bincon(p) = 0$, voor atomaire formules p
$bincon(\neg\varphi) = bincon(\varphi)$
$bincon((\varphi \square \psi)) = bincon(\varphi) + bincon(\psi) + 1$, voor $\square$ is $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$.

Een bewijs met inductie naar de opbouw van φ dat $haakjes(\varphi) = 2 \cdot bincon(\varphi)$:

Basisstap
voor atomaire formules p geldt:
$haakjes(p) = bincon(p) = 0$

Inductiestap
Geval $\neg$:

Stel (inductiehypothese) $haakjes(▯) = 2 \cdot bincon(▯)$. Dan geldt:

$haakjes(\neg ▯)$	
$= haakjes(▯)$	definitie *haakjes*
$= 2 \cdot bincon(▯)$	inductie
$= bincon(\neg ▯)$	definitie *bincon*

Geval ▯:

Stel (inductiehypothesen) $haakjes(▯) = 2 \cdot bincon(▯)$ en $haakjes(▯) = 2▯bincon(▯)$. Dan geldt:

$haakjes((▯ ▯ ▯))$	
$= haakjes(▯) + haakjes(▯) + 2$	definitie *haakjes*
$= 2 \cdot bincon(▯) + 2 \cdot bincon(▯) + 2$	inductie
$= 2 \cdot (bincon(▯) + bincon(▯) + 1)$	uitrekenen
$= 2 \cdot (bincon((▯ ▯▯)))$	definitie *bincon*

De overige gevallen gaan evenzo.

□

8a Ja.
De formule $x = 0 \quad (▯y\ (y < x ▯ Py)\ ▯\ ▯y\ (x < y ▯ \quad Py))$ is equivalent met $x = 0 \quad (▯y\ (y < x ▯ Py)\ ▯\ ▯y\ (\neg x < y \quad Py))$, en hierin komt P alleen syntactisch positief voor.

8b Op $\{0, 1, ..., n\}$ wordt P als volgt benaderd:

$I_0(P) = \varnothing$
$I_1(P) = \{0\}$
$I_2(P) = \{0, n\}$
$I_3(P) = \{0, n-1, n\}$
$I_4(P) = \{0, n-2, n-1, n\}$
.....
$I_{n+1}(P) = \{0, 1, ..., n\}$
$I_{n+2}(P) = I_{n+1}(P)$
.....
Het proces stabiliseert. $I(P) = \{0, 1, ..., n\}$.

8c Op $\mathbb{N}$ wordt P als volgt benaderd:

$I_0(P) = \varnothing$
$I_1(P) = \{0\}$
$I_2(P) = I_1(P)$
.....
(Aan het rechterlid van de disjunctie kan nu immers nooit voldaan worden.) $I(P) = \{0\}$.