4 punten

1 Reduceer $(\lambda xy\,.\,x\,(x\,y))(\lambda z\,.\,x\,z)$ tot een normaalvorm. Werk alle mogelijke reducties uit.

4 punten

2 a Een relatie R heet *voortzettend* als voor elke x geldt dat er een y is zodat Rxy.
Bewijs dat de klasse der voortzettende frames wordt gekarakteriseerd door de modale formule $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$.

6 punten

b Op voortzettende frames geldt *niet* dat $\Box\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$. Laat dit zien met behulp van een semantisch tableau en een daarmee geconstrueerd tegenvoorbeeld.

6 punten

3 Beschouw het volgende STIP–programma π:

$z := y\ ;\ v := x\ ;\ \text{WHILE}\ \neg v = 0\ \text{DO}\ (z := z - 1\ ;\ v := v - 1)$

Bewijs de correctheidsbewering $\{x \leq y\}\ \pi\ \{z = y - x\}$. U kunt gebruik maken van de lus–invariant: $v \leq z \wedge z - v = y - x$.

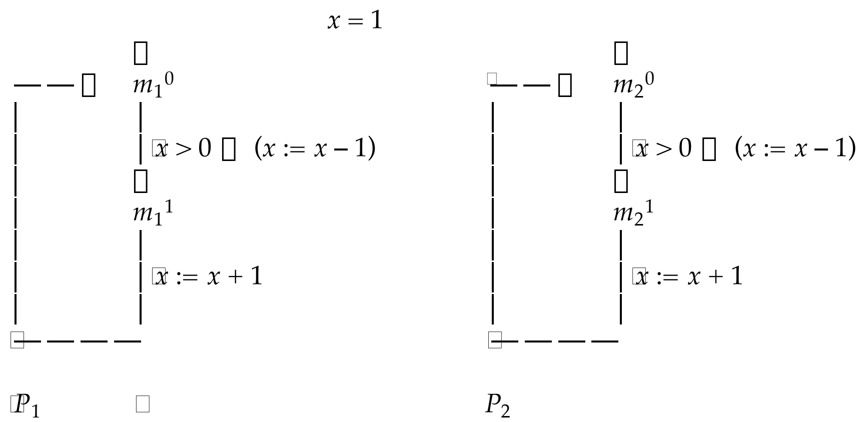
6 punten

4 Gegeven is het logische programma π:

$Pxy \leftarrow Pyx, Pax$ i
$Pxc \leftarrow Qcx$ ii
$Qca \leftarrow$ iii

Geef bij het doel $\leftarrow Pxy$ twee resolutie-afleidingen die twee verschillende antwoorden geven.

5 Bekijk het volgende eenvoudige parallelle programma DUBBEL:



We gebruiken propositieletters $m_i{}^j$ om aan te duiden dat deelproces P_i in de lokale toestand $m_i{}^j$ verblijft. Verder gebruiken we de afkorting Q voor:

$$((m_1{}^1 \wedge \neg m_2{}^1 \wedge \neg(x = 1)) \vee (\neg m_1{}^1 \wedge m_2{}^1 \wedge \neg(x = 1)) \vee (\neg m_1{}^1 \wedge \neg m_2{}^1 \wedge (x = 1)))$$

Dus Q is de exclusieve disjunctie van $m_1{}^1$, $m_2{}^1$ en $x = 1$.

GA VERDER OP DE VOLGENDE PAGINA

2 punten a Er zijn maar *vier* verschillende overgangen mogelijk in het programma DUBBEL, gegeven de randvoorwaarden. Welke overgangen?

4 punten b Beschrijf een mogelijke uitvoering van DUBBEL.

3 punten c Geef voor elke lokale toestand m in DUBBEL een tijdslogische formule Nm, die precies dan geldt als het programma op het punt staat een overgang vanuit m te maken. Gebruik hierbij de notatie '$Xy = z$' om aan te duiden dat de huidige waarde van z in de volgende toestand de waarde van y zal zijn.

2 punten d Wat drukt de formule $G\neg(m_1{}^0 \square\ m_1{}^1)$ uit?

4 punten e Neem aan dat geldt:

- $G\neg(m_1{}^0 \square\ m_1{}^1)$
- $G\neg(m_2{}^0 \square\ m_2{}^1)$
- $G(x = 0 \quad x = 1)$

Hiermee, en met behulp van onderdeel c, is te bewijzen dat $Q \square\ XQ$ geldt. Doe dit voor één overgang.

2 punten f Leid nu met behulp van e uit $Q \square\ XQ$ de formule GQ af. U mag door elkaar heen direct semantisch redeneren en het systeem DX gebruiken.

ANTWOORDEN

1a Er zijn twee mogelijke reducties:

$(\lambda xy \,.\, x\,(x\,y))(\lambda z \,.\, x\,z)$
$= \lambda y \,.\, (\lambda z \,.\, x\,z)((\lambda z \,.\, x\,z)\,y)$
$= \lambda y \,.\, (\lambda z \,.\, x\,z)(x\,y)$
$= \lambda y \,.\, (x\,(x\,y))$

$(\lambda xy \,.\, x\,(x\,y))(\lambda z \,.\, x\,z)$
$= \lambda y \,.\, (\lambda z \,.\, x\,z)((\lambda z \,.\, x\,z)\,y)$
$= \lambda y \,.\, (x\,((\lambda z \,.\, x\,z)\,y))$
$= \lambda y \,.\, (x\,(x\,y))$

2a We bewijzen: F is voortzettend $\Leftrightarrow$ $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ karakteriseert F

$\Rightarrow$
Laat F een voortzettend frame zijn en w een wereld op F. Dan is er dus een wereld w' zodat Rww'. Als $w \models \Box\varphi$, dan geldt $w' \models \varphi$, en dus $w \models \Diamond\varphi$. Dus $w \models \Box\varphi \to \Diamond\varphi$. Omdat w willekeurig was, geldt $F \models \Box\varphi \to \Diamond\varphi$.
$\Leftarrow$
Stel dat F niet voortzettend is. Dan is er een wereld w waarvoor geldt dat er geen w' is zodat Rww'. Dan geldt: $w \models \Box\varphi$ en $w \not\models \Diamond\varphi$, en dus: $w \not\models \Box\varphi \to \Diamond\varphi$. Hieruit volgt: $F \not\models \Box\varphi \to \Diamond\varphi$.
$\Box$

2b We laten zien dat $\Box\varphi \to \Diamond\varphi \not\models \Box\varphi \to \Box\Diamond\varphi$, door een tableau voor deze gevolgtrekking te construeren; in plaats van de formulevariabele φ volstaat het te kijken naar een propositie p; uiteraard dienen we de modale operator $\Diamond$ te herschrijven als $\neg\Box\neg$. Een mogelijk tableau is:

$\Box p \to \neg\Box\neg p \circ_1 \Box p \to \Box\neg\Box\neg p$

$\Box p \to \neg\Box\neg p, \Box p \circ_1 \Box\neg\Box\neg p$

$\circ_1 \Box p$ $\neg\Box\neg p \circ_1$

$=$ $\circ_1 \Box\neg p$

$p \circ_2 \neg\Box\neg p$ $p \circ_3 \neg p$

$\Box\neg p \circ_2$ $p \circ_3$

Er zijn twee takkenbundels, een daarvan is open. Het hierbij gevonden tegenvoorbeeld is:

2   1   3
•   •   •
p p

Immers $1 \models \Box\varphi \to \Diamond\varphi$ en $1 \not\models \Box\varphi \to \Box\Diamond\varphi$.

(Dit tegenmodel is dus zelf niet voortzettend. Dat is ook niet vereist, voldoende is, dat het een tegenvoorbeeld van de gevolgtrekking is.)

3 Bewijs van het gevraagde:

1	$\{v-1 \leq z \wedge z-(v-1) = y-x\}\ v := v-1\ \{v \leq z \wedge z-v = y-x\}$	H1
2	$\{v-1 \leq z-1 \wedge (z-1)-(v-1) = y-x\}$ $z := z-1$ $\{v-1 \leq z \wedge z-(v-1) = y-x\}$	H1
3	$\{v-1 \leq z-1 \wedge (z-1)-(v-1) = y-x\}$ $z := z-1 \,;\, v := v-1$ $\{v \leq z \wedge z-v = y-x\}$	H2, 1, 2
4	$\{ v \leq z \wedge z-v = y-x\}$ $z := z-1 \,;\, v := v-1$ $\{v \leq z \wedge z-v = y-x\}$	H5, 3
5	$\{\neg v = 0 \wedge v \leq z \wedge z-v = y-x\}$ $z := z-1 \,;\, v := v-1$ $\{v \leq z \wedge z-v = y-x\}$	H5, 4
6	$\{v \leq z \wedge z-v = y-x\}$ WHILE $\neg v = 0$ DO $(z := z-1 \,;\, v := v-1)$ $\{v = 0 \wedge v \leq z \wedge z-v = y-x\}$	H4, 5
7	$\{x \leq z \wedge z-x = y-x\}\ v := x\ \{v \leq z \wedge z-v = y-x\}$	H1
8	$\{x \leq y \wedge y-x = y-x\}\ z := y\ \{x \leq z \wedge z-x = y-x\}$	H1
9	$\{x \leq y \wedge y-x = y-x\}\ z := y \,;\, v := x\ \{v \leq z \wedge z-v = y-x\}$	H2, 7, 8
10	$\{x \leq y \wedge y-x = y-x\}$ $z := y \,;\, v := x \,;$ WHILE $\neg v = 0$ DO $(z := z-1 \,;\, v := v-1)$ $\{v = 0 \wedge v \leq z \wedge z-v = y-x\}$	H2, 9, 6
11	$\{x \leq y\}$ $z := y \,;\, v := x \,;$ WHILE $\neg v = 0$ DO $(z := z-1 \,;\, v := v-1)$ $\{v = 0 \wedge v \leq z \wedge z-v = y-x\}$	H5, 10
12	$\{x \leq y\}$ $z := y \,;\, v := x \,;$ WHILE $\neg v = 0$ DO $(z := z-1 \,;\, v := v-1)$ $\{z = y-x\}$	H5, 11

4 Een afleiding van $\leftarrow Pxy$ met resolutie is:

1	$\leftarrow Pxy$	doel
2	$Px_1y_1 \leftarrow Py_1x_1, Pax_1$	i
3	$\leftarrow Pyx, Pax$	resolutie, 1, 2, $\theta = [x/x_1, y/y_1]$
4	$Px_2c \leftarrow Qcx_2$	ii
5	$\leftarrow Pyc, Qca$	resolutie, 3, 4, $\theta = [a/x_2, c/x]$
6	$Qca \leftarrow$	iii
7	$\leftarrow Pyc$	resolutie, 5, 6
8	$Px_3c \leftarrow Qcx_3$	ii
9	$\leftarrow Qcy$	resolutie, 7, 8, $\theta = [y/x_3]$
10	$Qca \leftarrow$	iii
11	$\square$	resolutie, 9, 10, $\theta = [a/y]$

De berekende antwoordsubstitutie geeft: $x = c$ en $y = a$.

Een andere resolutie-afleiding, die tot een ander antwoord leidt:

1	$\leftarrow Pxy$	doel
2	$Px_1c \leftarrow Qcx_1$	ii
3	$\leftarrow Qcx$	resolutie, 1, 2, $\theta = [x/x_1, c/y]$
4	$Qca \leftarrow$	iii
5	$\square$	resolutie, 3, 4, $\theta = [a/x]$

De berekende antwoordsubstitutie geeft nu: $x = a$ en $y = c$.

5a Er zijn vier mogelijke overgangen:
– van $m_1{}^0$ naar $m_1{}^1$, gegeven $m_2{}^0$
– van $m_1{}^1$ naar $m_1{}^0$, gegeven $m_2{}^0$
– van $m_2{}^0$ naar $m_2{}^1$, gegeven $m_1{}^0$
– van $m_2{}^1$ naar $m_2{}^0$, gegeven $m_1{}^0$
Gezien de overgangsvoorwaarden en beginvoorwaarden is een combinatie $m_1{}^1$ met $m_2{}^1$ uitgesloten.

5b Een mogelijke uitvoering is:

$\langle m_1{}^0, m_2{}^0; 1\rangle, \langle m_1{}^1, m_2{}^0; 0\rangle, \langle m_1{}^0, m_2{}^0; 1\rangle, \langle m_1{}^0, m_2{}^1; 0\rangle, \langle m_1{}^0, m_2{}^0; 1\rangle$, ...

Het proces loopt oneindig door; we kunnen steeds kiezen tussen een deelproces P_1 of een deelproces P_2.

5c DUBBEL kent 4 lokale toestanden, dus we dienen in totaal 4 formules Nm te geven:
– $Nm_1{}^0 = m_1{}^0 \wedge Xm_1{}^1 \wedge (Xx = x - 1)$. We nemen aan dat DUBBEL op het punt staat de overgang van $m_1{}^0$ naar $m_1{}^1$ te maken, en dat dus aan de overgangsvoorwaarde $x > 0$ voldaan is.
– $Nm_1{}^1 = m_1{}^1 \wedge Xm_1{}^0 \wedge (Xx = x + 1)$.
– $Nm_2{}^0 = m_2{}^0 \wedge Xm_2{}^1 \wedge (Xx = x - 1)$. We nemen aan dat DUBBEL op het punt staat de overgang van $m_2{}^0$ naar $m_2{}^1$ te maken, en dat dus aan de overgangsvoorwaarde $x > 0$ voldaan is.
– $Nm_2{}^1 = m_2{}^1 \wedge Xm_2{}^0 \wedge (Xx = x + 1)$.

5d De formules $G\neg(m_1{}^0 \wedge m_1{}^1)$ drukt de 'mutual exclusion' van $m_1{}^0$ en $m_1{}^1$ uit. Met andere woorden: de formules drukken uit dat DUBBEL nooit tegelijk in de lokale toestanden $m_1{}^0$ en $m_1{}^1$ kan verblijven.

5e Stel er geldt op een willekeurig moment in de verwerking van DUBBEL Q. Dan moet worden aangetoond dat XQ. Als er geen overgang plaatsvindt (dat wil zeggen: als een lege stap plaats vindt), dan geldt zeker XQ. We bekijken nu de situatie dat er wel een overgang plaatsvindt. We kunnen volstaan met het bekijken van de 4 mogelijke overgangen zoals beschreven in onderdeel a. De uitgangssituatie bij een overgang kunnen we beschrijven met behulp van onderdeel c.

We volstaan hier met te kijken naar één overgang; voor een volledig bewijs (wat hier niet gevraagd wordt) dient u ook de andere overgangen na te gaan.

Stel $m_2{}^0 \wedge Nm_1{}^0$. Dan vindt kennelijk een overgang in het deelproces P_1 plaats. Met de definitie van N volgt hieruit:

$m_2{}^0 \wedge Xm_2{}^0 \wedge m_1{}^0 \wedge (x > 0) \wedge Xm_1{}^1 \wedge Xx = x - 1$

Uit $G\neg(m_1{}^0 \wedge m_1{}^1)$ volgt $\neg(m_1{}^0 \wedge m_1{}^1)$ en hieruit en uit $m_1{}^0$ volgt $\neg m_1{}^1$. Evenzo volgt $\neg m_2{}^1$. Uit $\neg m_1{}^1 \wedge \neg m_2{}^1$ en Q volgt $x = 1$. Hieruit en uit $Xx = x - 1$ volgt $Xx = 0$.
Dus $Xm_1{}^1 \wedge Xm_2{}^0 \wedge Xx = 0$. Dus (semantisch in te zien) $X(m_1{}^1 \wedge m_2{}^0 \wedge x = 0)$. Uit de 'mutual exclusion' van $m_2{}^0$ en $m_2{}^1$, en van $x = 0$ en $x = 1$ krijgen we hieruit $X(m_1{}^1 \wedge \neg m_2{}^1 \wedge \neg(x = 1))$, en dus XQ.

5f Uit $Q \rightarrow XQ$ volgt eveneens $G(Q \rightarrow XQ)$, omdat de globale toestand waarvanuit we redeneren willekeurig is. Verder geldt bij de start van het

programma DUBBEL dat ${m_1}^0$ $\square$ ${m_2}^0$ $\square$ $x = 1$, dat wil zeggen: $\neg {m_1}^1$ $\square$ $\neg {m_2}^1$ $\square$ $x = 1$, dus ook bij de start van het programma geldt Q.
We gaan nu over op redeneren in DX: gegeven G(Q $\square$ XQ) en Q volgt nu op grond van het inductieaxioma $G(Q$ $\square$ $XQ)$ $\square$ $(Q$ $\square$ $GQ)$ met twee keer Modus Ponens dat GQ.