

## Is de toekomst der wiskunde voorspelbaar?

[A. Heyting, Afscheidsrede, 18 mei 1968]<sup>1</sup>

Geconfronteerd met de vraag, hoe men een afscheidscollege houdt, meende ik aanvankelijk dat een afscheidscollege een college is, zodat ik een zekere afgebakende stof duidelijk en uitvoerig zou dienen te behandelen. Deze opvatting stuitte niet alleen op hevig verzet bij sommige potentiële toehoorders, die meenden dat een zodanig college noodzakelijk zowel vervelend als onbegrijpelijk zou moeten zijn —ik hoop dat degenen die bij mij colleges gevolgd hebben daar anders over denken—, zij was ook om praktische redenen onuitvoerbaar. Een wiskundige kan nu eenmaal niet ernstig spreken als hij geen schrijfmateriaal bij de hand heeft. Toen viel mij een uitspraak in van D.J. Korteweg, bij wie ik het voorrecht had, nog enkele jaren college te lopen (hij trad omstreeks 1918 af), namelijk dat een oratie een wetenschappelijke geloofsbelijdenis behoort te zijn. Zijn eigen oratie uit 1881 voerde als titel ‘De wiskunde als hulpwetenschap’. Hij is aan dit programma trouw gebleven. Een belangrijk deel van het wiskundige werk voor de thermodynamica, die toen in opkomst was en speciaal in Amsterdam door Van der Waals en later door Kohnstamm werd beoefend, is door Korteweg verricht.<sup>2</sup> Laat men nu niet denken dat hij een bekrompen geest had zonder inzicht in het belang van abstracte wiskunde; het tegendeel blijkt uit het feit, dat hij de promotor was van L.E.J. Brouwer op zijn proefschrift ‘Over de grondslagen der wiskunde’. Overigens getuigde zijn pleidooi voor het belang van de dienende taak der wiskunde wel van een vooruitziende blik. Het is algemeen bekend, dat statistische methoden een onmisbaar instrument geworden zijn voor de steeds uitgebreidere delen der wetenschap, bijvoorbeeld zowel voor de medicijnen als voor de sociologie. Ook in de economie en in de taalkunde worden steeds meer wiskundige methoden toegepast, ook al verzetten sommige beoefenaren vooral van de taalkunde zich nog hiertegen, omdat naar hun mening bij de wiskundige behandeling essentiële elementen van de taal verwaarloosd worden. Men kan dit beamen en toch de toepassing van wiskundige methoden bepleiten. Overal waar wiskunde toegepast wordt, treedt een zekere mate van abstractie op, waardoor enerzijds problemen kunnen worden aangepakt die in hun concrete vorm te ingewikkeld zijn, anderzijds voortdurende controle of de resultaten nog wel met de werkelijkheid corresponderen, noodzakelijk blijft. In principe ligt dit in de zogenaamde geesteswetenschappen niet anders dan in de natuurwetenschappen. Het verschil is hoogstens gradueel in die zin dat de graad van betrouwbaarheid van langs wiskundige weg verkregen resultaten geringer is. Laat ik als voorbeeld van de uitbreiding van de dienende taak der wiskunde het gebruik van computers op velerlei terrein niet vergeten. Is dus enerzijds de dienende taak van de wiskunde steeds belangrijker geworden, anderzijds hebben de wiskundigen steeds dieper gegraven in de richting van abstractie. Zij zijn hierin zo ver gegaan, dat het ten slotte moeilijk te zien was waarover zij eigenlijk spraken en of zij eigenlijk wel ergens over spraken. Men hoort wel eens beweren, dat de wiskunde juist door deze abstractie zich isoleert, dat

<sup>1</sup>Opgemaakt in augustus 2015 naar een fotocopie uit de bibliotheek van wiskunde van een typoscript.

<sup>2</sup>Geschrapte zin: Zeer veel werk heeft hij gedaan voor de uitgave van de werken van Christiaan Huygens.

de wiskundigen een groep mensen zijn, die alleen voor elkander begrijpelijk zijn en verder buiten de samenleving staan. Ik geloof dat dit onjuist is. De drang naar grotere abstractie, het streven naar diepere fundering is in onze tijd niet alleen aan de wiskunde eigen, maar is een kenmerk van alle filosofische richtingen van onze tijd, zowel van de positivistische als van de existentialistische. Wiskundigen zijn zich meer voor filosofie gaan interesseren dan in de vorige eeuw het geval was. Omdat wiskunde aan de ene kant steeds nauwer bij de materiële welvaart betrokken wordt, anderzijds tot filosofische problemen aanleiding geeft, is ze naar mijn mening een van de belangrijkste bindende elementen van onze cultuur. Het feit dat de techniek der wiskunde voor de grote meerderheid een gesloten boek blijft, betekent niet dat de wiskunde als geheel geïsoleerd zou staan. Vele autorijders hebben geen flauw idee van de werking van hun motor, maar desondanks staat de techniek niet geïsoleerd in onze maatschappij.

Ik heb de vraag, wat een afscheidscollege moet zijn, niet beantwoord en ik zal dat ook niet doen. Ik kom niet verder dan een antwoord op de vraag, wat het niet kan zijn. Hieraan zal het vervolg van mijn betoog grotendeels gewijd zijn. Als een oratie een wetenschappelijke geloofsbelijdenis moet zijn, dient een afscheid het tegengestelde in te houden, een soort biecht, waarin men nagaat, in hoeverre men zich aan het gestelde doel heeft gehouden? Ik voel niet de minste behoefte aan een zelfrechtvaardiging, nog minder aan een zelfbeschuldiging. Anderen, mijn leerlingen, de latere ontwikkeling van de wetenschap zullen beoordelen in hoeverre mijn werk waardevol is geweest. Een testament dan, een programma voor de voortzetting van mijn werk zoals ik mij die voorstel? Ik mag, vind ik, mijn leerlingen en opvolgers niet trachten te binden, en zij zouden zich met recht van een dergelijk testament niets aantrekken.

Trouwens, de ontwikkeling van de wetenschap laat zich niet voorspellen. Zij gedraagt zich als een organisme, dat zijn toekomstige toestand wel in de kiem met zich meedraagt, maar niet zodanig dat de toekomst daaruit voor ons te voorspellen zou zijn. Uit het zaad is de plant die eruit zal groeien alleen te voorspellen voor degenen die de plant al eens heeft gezien. Naar de biologen beweren, zijn onze oren ontstaan uit de kieuwen van een vis, maar die vis kan niet weten, dat zijn ademhalingsorganen eens zullen dienen om geluid waarneembaar te maken. Om een voorbeeld uit ander gebied te noemen, de kapiteins van de schepen, die negers uit Afrika naar Amerika vervoerden, beseften niet voor welke problemen die negerbevolking later zou oproepen. Welnu, de wetenschap ontwikkelt zich op even onvoorspelbare wijze als een levend wezen of een maatschappelijke structuur. Haar voortgang heeft daardoor soms het karakter van een spannende film. Ik wil enkele voorbeelden geven van dergelijke spannende momenten uit de wiskunde, vooral uit die van de laatste tijd. Een bekend voorbeeld is de ontwikkeling van de niet-euclidische meetkunde. Eeuwenlang heeft men getracht het zogenaamde parallelenpostulaat, dat zegt: 'Door een punt buiten een lijn gaat slechts één lijn evenwijdig met die lijn', uit de overige axioma's te bewijzen. In de negentiende eeuw kwamen verschillende wiskundigen waaronder Gauss, Lobatsjefski en Bolyai tot de overtuiging dat dit niet kon, met andere woorden, dat men de ontkenning van het parallelenaxioma kan aannemen zonder tot een tegenspraak te komen. Lobatsjefski was het dichtste bij een bewijs hiervan; volledig overtuigend werd het gegeven door Felix Klein. Het merkwaardige is, dat de wiskundigen, die trachtten het parallelenpostulaat

te bewijzen,<sup>3</sup> meestal zo te werk gingen, dat zij trachtten uit de ontkenning er van een tegenspraak af te leiden. Het effect van hun werk was precies het tegendeel van hetgeen zij nastreefden; toen eenmaal de mogelijkheid van de niet-euclidische meetkunde was gebleken, bleken hun beschouwingen een belangrijk stuk van die nieuwe meetkunde te bevatten. Wel verre van de onmogelijkheid van niet-euclidische meetkunde te bewijzen, hadden zij die voor een belangrijk deel ontwikkeld.

Een dergelijk lot was de analytische meetkunde beschoren. Hoewel reeds de Grieken incidenteel coördinaten hadden gebruikt, hebben Fermat en Descartes ze systematisch als hulpmiddel in de meetkunde ingevoerd. Op den duur heeft de algebra, in plaats van als dienaar van de meetkunde op te treden, de hele meetkunde opgeslokt. De eerstejaars student in de wiskunde krijgt dadelijk de zuiver algebraïsche theorie van de vektorruimten voorgeschoteld, waarbij de toepassing op de driedimensionale euclidische ruimte de rol van een vraagstukje speelt. Zelfs de toegepast wiskundigen trachten hun ruimtelijke beschouwingen zo snel mogelijk in abstracte vorm te gieten, om van de algemene theorie te kunnen profiteren.<sup>4</sup>

Verdere voorbeelden ontleen ik aan de grondslagen der wiskunde. Tussen ongeveer 1880 en 1900 heeft de wiskunde een gedaanteverwisseling doorgemaakt. Voor die tijd was ze de wetenschap van getal en maat. Nu kan men ze misschien het beste karakteriseren als de wetenschap van de abstracte entiteiten, hoewel een dergelijke definitie van een wetenschap, welke ook, altijd onvolkomen blijft. Tot de belangrijkste geleerden, die deze ommezwaai inleidden, behoorden Georg Cantor en Gottlob Frege. Cantor is bekend als de schepper van de verzamelingsleer. Frege stelde zich ten doel, de wiskunde op de logica als op een onwrikbaar fundament te grondvesten. Voortbouwend op het pionierswerk van Boole en andere logici, stelde hij een zuiver formeel systeem voor de logica op, d.w.z. hij voerde symbolen in voor alle fundamentele begrippen uit de logica en gaf regels voor het werken met symbolen. Daarna bracht hij op geniale wijze de gehele rekenkunde tot die formele logica terug. Hoe dat in zijn werk gaat, wil ik aan het allereenvoudigste voorbeeld, het getal 1, toelichten. Laat ik een logisch predicat  $P$  unair noemen, als het de volgende twee eigenschappen heeft: 1. Er is iets dat aan  $P$  voldoet, 2. Als  $A$  en  $B$  aan  $P$  voldoen, dan is  $A = B$ . Het getal 1 wordt nu gedefinieerd als de omvang van het begrip 'unair predicat'. Bij deze definitie zijn inderdaad alleen logische begrippen gebruikt. Wij zien ook het nauwe verband tussen logica en verzamelingsleer. De omvang van een begrip is niets anders dan een verzameling. Het feit dat Frege het woord 'Menge' niet gebruikt, wijst er reeds op, dat hij het werk van Cantor slecht kende. Was er meer contact tussen de beide geleerden geweest, dan zou Frege niet zo geschokt zijn door de paradox van Russell. Cantor wist, dat zijn verzamelingsleer tot tegenspraak leidde, maar hij vatte dit feit niet tragisch op. In een brief naar Dedekind spreekt hij van inconsistente of 'absolut unendliche' verzamelingen,<sup>5</sup> die tot tegenstrijdigheden voeren; hij bedoelt blijkbaar dat dergelijke verzamelingen voor ons niet toegankelijk zijn en daarom uitgesloten moeten worden. Deze gedachte is later door Von Neumann tot een axiomatisch systeem van de verzamelingsleer uitgewerkt. In 1903, toen het tweede deel van Frege's hoofdwerk de 'Grundgesetze der

<sup>3</sup>In de marge geschreven: Saccheri.

<sup>4</sup>In de marge geschreven: Distributies.

<sup>5</sup>In de marge geschreven: 1899.

Arithmetik' juist ter perse was, publiceerde Russell zijn beroemde paradox. Men kan die paradox als volgt formuleren: bijv. het predicaat 'abstract' is abstract. Beschouw nu het predicaat 'niet op zichzelf van toepassing'. Is dit op zichzelf van toepassing, dan is het niet op zichzelf van toepassing, maar is het niet op zichzelf van toepassing, dan is het wel op zichzelf van toepassing. Zo ontstaat een tegenspraak. Deze paradox trof Frege als een slag, die zijn levenswerk in gevaar bracht.

Blijkbaar ligt de oorzaak van dergelijke paradoxen, zoals Cantor reeds inzag, in het toelaten van te algemene predicaten of van te omvangrijke verzamelingen, maar de vraag hoe deze buiten te sluiten en hoever men daarmee moet gaan, was geenszins gemakkelijk te beantwoorden. Er zijn axiomatische systemen voor de verzamelingsleer opgesteld, waarin de paradoxen niet optraden. Er zijn ook formele systemen voor de logica opgesteld, waarin de te algemene predicaten automatisch worden vermeden. Maar al deze systemen hebben iets willekeurigs. In ieder geval heeft het werk van Frege geleid tot het tegengestelde van hetgeen hij zich ten doel stelde. In plaats van een fundering van de wiskunde op de onwrikbare logica ontstond een onderzoek naar de fundering van de logica en een fundamentele herziening van haar principes. Op grond van de nieuwe logica heeft Russell het programma van Frege uitgevoerd, de wiskundige begrippen tot logische te herleiden. Zijn methode komt in grote trekken met die van Frege overeen.<sup>6</sup>

De formele systemen voor logika en verzamelingsleer, die zo ontstonden, hadden wel het voordeel, dat de bekende paradoxen er niet in afgeleid konden worden, maar wie garandeert, dat er geen andere tegenstrijdigheden uit volgden? Sommige systemen, die voorgesteld werden, bleken inderdaad later tot een tegenspraak te leiden. Vandaar dat Hilbert de vraag naar de consistentie (niet-tegenstrijdigheid) van een formeel systeem centraal stelde. Zijn programma kwam op het volgende neer. Vang de gehele wiskunde, de logika inbegrepen, in een formeel systeem. Toon aan, met methoden die zo elementair zijn dat geen mens aan hun juistheid kan twijfelen, dat in dat formele systeem geen tegenstrijdigheid kan optreden.<sup>7</sup> Naast de wiskunde, die zuiver formeel is, en in principe niet geïnterpreteerd behoeft te worden, treedt zo een metamathematica, waarin alleen zeer elementaire redeneermethoden gebruikt worden. In het bijzonder wordt het bestaan van een getal met zekere eigenschappen alleen als bezwen beschouwd, als men dat getal werkelijk kan aangeven. Dit is een gedachte, die ook door Brouwer als een der belangrijkste grondslagen van het intuïtionisme is beschouwd. Het is waarschijnlijk, dat Hilbert bij het vormen van zijn idee van de bewijstheorie door Brouwer is beïnvloed; sommige uitingen van Brouwer wijzen hierop, maar met zekerheid valt het uit de literatuur niet te bewijzen.

Het consistentiebewijs voor de rekenkunde viel tegen: het bleek veel moeilijker dan verwacht was. Toch wekte het sensatie, dat Gödel bewees, dat het bewijs niet te geven was met de middelen van de rekenkunde zelf. Er is meer voor nodig. Op het eerste gezicht verviel hierdoor het hele programma van Hilbert. Wat voor zin heeft het, de consistentie van een theorie te bewijzen met behulp van een uitgebreidere theorie?

---

<sup>6</sup>Doorgehaald: formele systemen voor de logica werden ontwikkeld, waarbij de te algemene predicaten automatisch werden uitgesloten. Maar al deze systemen hebben iets willekeurigs. Om de opgelegde beperkingen te motiveren, moet men op de filosofie van de wiskunde steunen. Wel verre van een betrouwbare basis voor de wiskunde te leveren, werd de logika zo van wiskundige beschouwingen afhankelijk.

<sup>7</sup>In de marge geschreven: finiete methoden.

Toch is zo'n bewijs geleverd door Gentzen. Hij gebruikte inderdaad bewijsmiddelen, die buiten de gewone rekenkunde vallen, in het bijzonder een beginsegment van de rij der ordinaalgetallen. Deze theorie is elementair genoeg om hier gebruikt te worden.<sup>8</sup> Aan de andere kant gebruikte Gentzen niet de minder elementaire gedeelten van de rekenkunde, o.a. gebruikte hij niet onbeperkt het beginsel van het uitgesloten derde. Deze geschiedenis van de bewijstheorie is een der treffendste voorbeelden van de onvoorspelbaarheid van de toekomst van een theorie en van het feit dat een theorie zich dikwijls ontwikkelt in een richting tegengesteld aan die welke de ontwerpers van de theorie zich hadden voorgesteld.

Een ander voorbeeld ontleen ik aan de modeltheorie. Een model voor een theorie is, populair uitgedrukt, een interpretatie van die theorie met behulp van de verzamelingsleer. Zolang de theorie niet te veel logika gebruikt, precies gezegd, zolang ze met behulp van de elementaire logika beschreven kan worden, heeft de theorie een model dan en slechts dan als zij consistent is. Dit geldt niet meer als logika van hogere orde wordt toegepast. Dan zijn er consistente theorieën zonder model. Het bleek evenwel, dat ook hier de volledigheidstelling geldt, wanneer men het begrip model ruimer neemt en behalve de gewone ook zogenaamde non-standaard modellen toelaat. Sommige consistente theorieën hebben alleen non-standaard modellen, andere, en daaronder valt de rekenkunde, hebben zowel standaard- als non-standaard modellen. Een non-standaard model voor de rekenkunde was al door Skolem gegeven. Het werd als iets onaangenaams gevoeld. Men wilde zo graag een stelsel axioma's voor de rekenkunde hebben waaraan alleen de gewone rekenkunde voldoet en niets anders.<sup>9</sup> Verassend was het daarom, dat Robinson juist die non-standaard modellen gebruikte, om de oneindig kleine grootheden weer in de wiskunde in te voeren, en nu op een volkomen strenge wijze. Hij kon daardoor sommige bewijzen vereenvoudigen en op verschillende theorieën nieuw licht werpen.

Ook de axiomatiek van de verzamelingsleer heeft haar onverwachte resultaten. Het zogenaamde keuze-axioma speelt daar een rol, die enigszins te vergelijken was met die van het parallelenaxioma in de meetkunde. Sommigen beschouwen het als evident, anderen als twijfelachtig. Nu is door Gödel bewezen, dat men het keuze-axioma zonder vrees voor tegenstrijdigheid mag gebruiken; nauwkeuriger gezegd: Als de axioma's van de verzamelingsleer zonder keuze-axioma consistent zijn, dan blijven ze consistent na toevoeging van het keuze-axioma. Later bewees Cohen, dat hetzelfde geldt voor de ontkenning van het keuze-axioma. Men is dus vrij, het keuze-axioma aan te nemen of te ontkennen, evenals men in de meetkunde het parallelenaxioma kan aannemen of ontkennen. Analoog met de euclidische en niet-euclidische kan men zo een zermelosche<sup>10</sup> en een niet-zermelosche verzamelingsleer opbouwen. Analoog met het keuze-axioma gedraagt zich de zogenaamde continuüm-hypothese, waarop ik niet verder inga.

Toch is er van filosofisch standpunt uit gezien wel verschil tussen het geval van de meetkunde en dat van de verzamelingsleer. Met kan zowel de euclidische als de niet-euclidische meetkunde opbouwen als zuiver wiskundige theorieën en zich vervolgens afvragen welke van beide het best de ervaringsruimte beschrijft. Voor de verzamelings-

<sup>8</sup>In de marge geschreven: Dunkeling, Jongetje, Plank.

<sup>9</sup>In de marge geschreven: Euler.

<sup>10</sup>Een aantal malen is 'cantoriaanse' doorgehaald en in slecht leesbaar handschrift vervangen door 'zermelosche'.

leer ligt dit anders. De onder wiskundigen meest gebruikelijke opvatting is die van het begripsrealisme. Zij stellen zich een actueel bestaande wereld van verzamelingen voor. Men zou zo zeggen, dat in die wereld het keuze-axioma waar is of onwaar, dat wil zeggen slechts één van de twee verzamelingsleren, de zermelosche of de niet-zermelosche, is juist en de andere is fout. Men kan aan dit dilemma ontkomen door beide theorieën zuiver formeel op te bouwen en in het midden te laten welke voor de echte verzamelingenwereld geldt, maar dan komt die wereld helemaal buiten de wiskunde te liggen en is ze voor de wiskunde volkomen irrelevant.

Het intuïtionisme is ontstaan als reactie tegen het begripsrealisme en het formalisme. Brouwer definieerde wiskunde als die denkvorm, waarbij in abstracte eenheden gedacht wordt en de aard van die eenheden buiten beschouwing blijft. Volgens Brouwer is de taal slechts een begeleidend verschijnsel van de wiskunde. Hij beschouwde daarom formalisering als voor de wiskunde onvruchtbaar. Toch blijkt het voor het wederzijdse begrip van intuïtionistische wiskundigen onmisbaar, sommige onderdelen te formaliseren. Zo laat het begrip c.s. rij<sup>11</sup> verschillende interpretaties toe en om aan te geven welke men bedoelt, is het nodig zekere eigenschappen van het begrip nader te preciseren, wat neerkomt op een formalisering van de theorie der c.s. rijen. Wij zien weer, hoe de ontwikkeling gaat in een richting, tegengesteld aan diegene die Brouwer zich voorstelde, hoewel Brouwers grondgedachten daarbij onaangetast blijven.

Hoe het intuïtionisme zich verder zal ontwikkelen, kan ik dus niet voorspellen. Het geeft mij voldoening, dat er intensief aan gewerkt wordt zowel door verscheidene van mijn leerlingen als door anderen. Ik hoop dat uit dit onderzoek resultaten te voorschijn zullen komen, die zowel voor de intuïtionistische wiskunde zelf als voor een uitgebreider gebied van wetenschap waardevol zullen zijn.

---

<sup>11</sup>Op twee plaatsen is 'keuzen' doorgehaald en vervangen door 'c.s.'; c.s. staat hier voor choice sequens —in Heytings handschrift is de 's' in 'c.s.' onduidelijk.